5. *Определенные на всей прямой периодические колеблющиеся решения. Все они могут быть получены из одного, скажем,* $z(x)$, *при помощи соотношения* $y(x) = \lambda^4 z(\lambda^{k-1}x + x_0)$ *с произвольными* $\lambda > 0$ *и* x_0. *Таким образом, существуют такие решения с произвольным максимумом* $h > 0$ *и с произвольным периодом* $T > 0$, *но не с произвольной парой* (h, T).

6 – 7. *Определенные на* $(-\infty, +\infty)$ *решения, являющиеся колеблющимися на* $x \to -\infty$, *и имеющие степенное асимптотическое поведение на* $+\infty$: $y(x) \sim \pm C_{4k} x^{-4/(k-1)}$, $x \to +\infty$. *Для каждого решения этого типа существует конечный предел модулей его локальных экстремумов при* $x \to -\infty$.

8 – 9. *Определенные на* $(-\infty, +\infty)$ *решения, являющиеся колеблющимися на* $x \to +\infty$, *и имеющие степенное асимптотическое поведение на* $-\infty$: $y(x) \sim \pm C_{4k} |x|^{-4/(k-1)}$, $x \to -\infty$. *Для каждого решения этого типа существует конечный предел модулей его локальных экстремумов при* $x \to +\infty$.

10 – 13. *Определенные на* $(-\infty, +\infty)$ *имеющие степенное асимптотическое поведение на* $-\infty$ *и* $+\infty$ *(с четырьмя возможными парами знаков* $\pm$*)* : $y(x) \sim \pm C_{4k} |x|^{-4/(k-1)}$, $x \to \pm\infty$.

Замечание. Отметим, что периодические решения, определенные в п. 5, существуют у уравнения (2) и в случае регулярной нелинейности [1].

Литература

1. Асташова И. В. *Об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений с сингулярной нелинейностью* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 11. С. 847–848.

2. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1990. 432 с.

3. Асташова И. В. *Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений* // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Под ред. И. В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–288.

4. Astashova I. *On quasi-periodic solutions to a higher-order Emden—- Fowler type differential equation* // Boundary Value Problems. 2014. № 2014:174. P. 1–8.

5. Astashova I. V. *On Asymptotic Behavior of Solutions to a Forth Order Nonlinear Differential Equation.* Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Pure Mathematics (PUMA '14), Tenerife, Spain, January 10–12, 2014, ISBN: 978-960-474-360-5, WSEAS Press, 2014. P. 32–41.

6. Асташова И. В. *Асимптотическая классификация решений сингулярных нелинейных уравнений типа Эмдена — Фаулера четвертого порядка с постоянным положительным потенциалом* // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 6. С. 827–828.

О БЭРОВСКОМ КЛАССЕ И СТРОЕНИИ СПЕКТРОВ ВЕРХНИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ НУЛЕЙ, ЗНАКОВ И КОРНЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е.А. Барабанов, А.С. Войделевич

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

bar@im.bas-net.by, voidelevich@gmail.com

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-ого порядка $(n \in \mathbb{N})$

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами $a_i(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$. Будем отождествлять уравнение (1) и его строку $a = a(\cdot) = (a_1(\cdot), \ldots, a_n(\cdot))$ коэффициентов и поэтому обозначать уравнение (1) также через a. Пусть $S_*(a)$ — множество всех ненулевых решений уравнения a.

Символом $\varkappa$ обозначим величину, принимающую значения в множестве из трех элементов $\{0, -, +\}$. Для ненулевого решения $y(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ уравнения (1) через $\nu^{\varkappa}(y(\cdot); t)$ обозначим: число нулей сужения $y|_{(0,t)}(\cdot)$, если $\varkappa = 0$; число тех нулей сужения $y|_{(0,t)}(\cdot)$, в любой окрестности которых эта функция принимает значения разных знаков, если $\varkappa = -$; суммарное число корней сужения $y|_{(0,t)}(\cdot)$ (т. е. каждый корень считается с учетом кратности), если $\varkappa = +$. Очевидно, что величины $\nu^{\varkappa}(y(\cdot);t)$ при любом $t \geqslant 0$ конечны.

Следующие определения даны И. Н. Сергеевым [1, 2].

Определение 1. Верхней характеристической частотой $\widehat{\nu}^0[y]$ нулей, частотой $\widehat{\nu}^-[y]$ знаков и частотой $\widehat{\nu}^+[y]$ корней решения $y(\cdot) \in S_*(a)$ уравнения (1) называется величина

$$\widehat{\nu}^{\varkappa}[y] \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\, \nu^{\varkappa}(y(\cdot);t), \tag{2}$$

где символ $\varkappa$ равен 0, $-$ и $+$ соответственно.

Определение 2. Спектрами $\widehat{\nu}^0(S_*(a))$, $\widehat{\nu}^-(S_*(a))$ и $\widehat{\nu}^+(S_*(a))$ верхних характеристических частоты нулей, частоты знаков и частоты корней уравнения (1) называются множества, состоящие из верхних характеристических частот нулей, знаков и корней всех решений из $S_*(a)$ соответственно.

Для уравнения с неограниченными коэффициентами величины (2) могут, вообще говоря, на некоторых или всех ненулевых решениях уравнения (1) принимать значение $+\infty$.

Пусть $\widehat{\nu}^{\varkappa}(\cdot)$ — функция $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, действующая по правилу $\alpha \mapsto \widehat{\nu}^{\varkappa}[y_\alpha]$, где $y_\alpha(\cdot)$ — решение уравнения (1), для которого $(y_\alpha(0), \dot{y}_\alpha(0), \ldots, y_\alpha^{(n-1)}(0))^{\mathrm{T}} = \alpha$, а $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,+\infty]$ — неотрицательная полуось расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigsqcup \{-\infty,+\infty\}$. Функцию $\widehat{\nu}^{\varkappa}(\cdot)$ при $\varkappa = 0,-,+$ назовем соответственно функцией нулей, знаков и корней уравнения (1).

Как следует из теоремы Штурма и отмечено в [1, 2], спектры верхних характеристических частот нулей, знаков и корней уравнения первого порядка содержат только нуль, а уравнения второго порядка совпадают между собой и состоят из одного неотрицательного числа. Для уравнений высших порядков о строении спектров известно следующее. Для произвольных положительных несоизмеримых чисел $\omega_2 > \omega_1$ существует [3] автономное уравнение (1) четвертого порядка, спектры верхних характеристических частот нулей, знаков и корней которого совпадают с отрезком $[\omega_1, \omega_2]$. В [4] приведено периодическое дифференциальное уравнение третьего порядка со спектрами верхних характеристических частот нулей, знаков и корней, содержащими невырожденный отрезок. В [5] построены примеры двух дифференциальных уравнений третьего порядка, спектры верхних характеристических частот нулей и знаков одного из которых совпадают с множеством рациональных чисел отрезка $[0,1]$, а другого — с объединением множества иррациональных чисел отрезка $[0,1]$ и числа нуль.

Естественно возникают вопросы, что́ представляют собой спектры $\widehat{\nu}^{\varkappa}(S_*(a))$ и функции $\widehat{\nu}^{\varkappa}(\cdot)$, $\varkappa \in \{0,-,+\}$, уравнений (1). В докладе в предположении принадлежности нуля спектрам получено их полное описание, а для функций нулей, знаков и корней уравнений (1) дана неулучшаемая их характеризация на языке классов Бэра.

Приведем необходимые для формулировки теорем доклада определения. Пусть $\mathcal{M}$ — множество, а N — какой-либо класс его подмножеств. Скажем [6, с. 223 – 224], что функция $f(\cdot)\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(^*, N)$, если для любого $r \in \overline{\mathbb{R}}$ ее множество Лебега $[f(\cdot) \geqslant r]$ (т. е. прообраз $f^{-1}([r,+\infty])$ отрезка $[r,+\infty]$) принадлежит классу N. Основные интересующие нас классы множеств в $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ — первые три борелевские класса. Нулевой класс состоит из открытых и замкнутых множеств. Первый класс — из G_δ-множеств и F_σ-множеств, т. е. множеств, представимых соответственно в виде счетных пересечений открытых и счетных объединений замкнутых множеств. Второй класс — из $F_{\sigma\delta}$-множеств и $G_{\delta\sigma}$-множеств, т. е. множеств, представимых соответственно в виде счетных пересечений F_σ-множеств и счетных объединений G_δ-множеств. Множество, принадлежащее некоторому k-ому борелевскому классу, называется множеством точного борелевского класса k, если оно не принадлежит $(k-1)$-ому борелевскому классу.

Множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ называется [6, с. 213; 7, с. 489] суслинским множеством прямой $\mathbb{R}$, если оно является непрерывным образом множества иррациональных чисел, рассматриваемого в естественной топологии. Класс суслинских множеств содержит в качестве собственного подкласса класс борелевских множеств и является собственным подклассом класса измеримых по Лебегу множеств. Множество $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}$ — суслинское множество расширенной числовой прямой, если оно представимо в виде объединения суслинского множества прямой $\mathbb{R}$ и некоторого (в том числе и пустого) подмножества множества $\{-\infty, +\infty\}$.

Теорема 1. *Справедливы включения:* $\widehat{\nu}^{-}(\cdot) \in (^*, G_\delta)$ *и* $\widehat{\nu}^{0}(\cdot), \widehat{\nu}^{+}(\cdot) \in (^*, F_{\sigma\delta})$.

Теорема 1, в частности, означает, что функция $\widehat{\nu}^{-}(\cdot)$ принадлежит второму классу Бэра, а функции $\widehat{\nu}^{0}(\cdot)$ и $\widehat{\nu}^{+}(\cdot)$ — третьему классу Бэра. Простым следствием теоремы 1 и определения суслинских множеств является

Теорема 2. *Спектры* $\widehat{\nu}^{0}(S_*(a))$, $\widehat{\nu}^{-}(S_*(a))$ *и* $\widehat{\nu}^{+}(S_*(a))$ *верхних характеристических частот нулей, знаков и корней уравнения* (1) *представляют собой суслинские множества неотрицательной полуоси* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *расширенной числовой прямой.*

В предположении, что спектры содержат точку нуль, получено обращение этого утверждения: справедлива

Теорема 3. *Для произвольного содержащего нуль суслинского множества* $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *существует уравнение* (1) *третьего порядка, спектры верхних характеристических частот нулей, знаков и корней которого совпадают с множеством* $\mathcal{A}$.

Следующая теорема показывает, что утверждение теоремы 1 неулучшаемо.

Теорема 4. *Существует такое уравнение* (1) *третьего порядка, что множество Лебега* $[\widehat{\nu}^{-}(\cdot) \geqslant r]$ *его функции знаков при некотором* $r > 0$ *есть множество точного первого борелевского класса, а также такое уравнение* (1) *третьего порядка, что множества Лебега* $[\widehat{\nu}^{0}(\cdot) \geqslant r]$ *и* $[\widehat{\nu}^{+}(\cdot) \geqslant r]$ *его функций нулей и корней — множества точного второго борелевского класса.*

Литература

1. Сергеев И. Н. *Определение характеристических частот линейного уравнения* // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 11. С. 1573.
2. Сергеев И. Н. *Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения* // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 25. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2006. С. 249–294.
3. Горицкий А. Ю., Фисенко Т. Н. *Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний* // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 4. С. 479–485.
4. Смоленцев М. В. *Пример периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектр частот которого содержит отрезок* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1413–1417.
5. Войделевич А. С. *Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 3. С. 17–23.
6. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.–Л.: ОНТИ, 1937. 304 с.
7. Куратовский К. *Топология* : в 2-х т. Т. 1. М.: Мир, 1966. 596 с.

ТОЧНЫЕ КРАЙНИЕ ГРАНИЦЫ ПОДВИЖНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БОЛЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЕЕ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Е.А. Барабанов[1], **А.В. Конюх**[2]

[1] Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
bar@im.bas-net.by,
[2] Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь
al3128@gmail.com

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$